数理解析研究所講究録
920 巻 1995 年 194-201

22.

実 2 次有理関数族のモジュライ空間について

日本大学 理工学部 数学科
藤村 雅代 (Masayo FU-JIMURA)

J. Milnor [Mil92] により、2 次有理関数族のモジュライ空間の研究がなされている。これを基に、実 2 次有理関数の空間から、モジュライ空間を定める。また、2 次有理関数の力学的な性質の違いによって、モジュライ空間を代数曲線で分類[1]する。

なお、ここで必要な複素力学系の用語は [Mil] [Bea91] による。

22.1 準備

実 2 次有理関数の空間、$\mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ は次をみたす有理関数 $f: \mathbf{R} \cup \{\infty\} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ からなる空間である。

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2}$$

ただし、$p(x)$ と $q(x)$ は、互いに素な実係数多項式とし、a_0 と b_0 は同時に 0 にならないとする。

空間 $\mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ に Möbius 変換群 $\mathrm{Rat}_1(\mathbf{R})$ は次のように作用する。

$$g \in \mathrm{Rat}_1(\mathbf{R}),\ f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbf{R}) \Rightarrow g \circ f \circ g^{-1} \in \mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$$

したがって、 $\mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ の 2 つの f_1, f_2 に対して、$g \in \mathrm{Rat}_1(\mathbf{R})$ が存在して、
$g \circ f_1 \circ g^{-1} = f_2$ となるとき、 f_1 と f_2 は **holomorphically conjugate** であるといい、$f_1 \sim f_2$ と書く。

[1]代数曲線の描画には数式処理システム Risa/Asir を用いた。

22.2 実2次有理関数のモジュライ空間

22.2.1 モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

定義 22.2.1. $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = \mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})/\sim$ とするとき、$\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ を実2次有理関数 f の holomorphic conjugacy class $\langle f\rangle$ のモジュライ空間 **(moduli space)** と呼ぶ。

上と同様にして、$\mathrm{Rat}_2(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ が定義できる。$\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ に座標を入れるため、[Mil92] では次のような手法を用いている。

Rat_2 (係数、変数とも、複素数でも実数でもよい) の関数 f に対して、$f \in \mathrm{Rat}_2$ の不動点を z_1, z_2, z_3 とおき、それぞれの multiplier (不動点での微分係数) を μ_1, μ_2, μ_3 とする。さらに multiplier の基本対称式を次のようにおく。

$$\sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1, \quad \sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$$

$\mathrm{Rat}_2(\mathbf{C})$ に対し、$\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ は次のように決まる。

補題 22.2.2. [Mil92] multiplier μ_1, μ_2, μ_3 は $\langle f\rangle$ を決定し、次の式をみたす。

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 = 0 \quad (i.e.\ \sigma_3 = \sigma_1 - 2) \tag{1}$$

したがって、モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ は座標 (σ_1, σ_2) によって、$\mathbf{C}^2$ と同形になる。

ここで $\mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ の関数 f について考える。このとき、不動点 z_1, z_2, z_3 と multiplier μ_1, μ_2, μ_3 は、すべて実数、または、実数1つと複素共役なもの2つの組合せしかあり得ない。したがって、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はいつでも実数値をとることがわかる。

また、multiplier は、(1) 式をみたし、ある例外を除いて $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}^2$ を一つ決めると、実係数の Möbius 変換によってただ一つの $\langle f\rangle$ $(\neq \langle x^2 + c\rangle)$ が決まる。例外を与えるような点 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}$ の集合は、3次代数曲線になる。

ただし、直線、$\sigma_1 = 2$ 上では、2次多項式の holomorphic conjugacy class $\left\langle x^2 + \frac{\sigma_2}{4}\right\rangle$ も同時に対応する。

補題 22.2.3. holomorphic conjugacy class $\langle f\rangle$ $(\neq \langle x^2 + c\rangle)$ が唯一つに決まらない (σ_1, σ_2) の集合は、次のような $\mathbf{R}^2$ 上の3次代数曲線である。(図 22.2.1 参照。)

$$2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0 \tag{2}$$

(2) 式で定まる3次曲線の上の (σ_1, σ_2) に対しては、2つの conjugacy class が対応する。

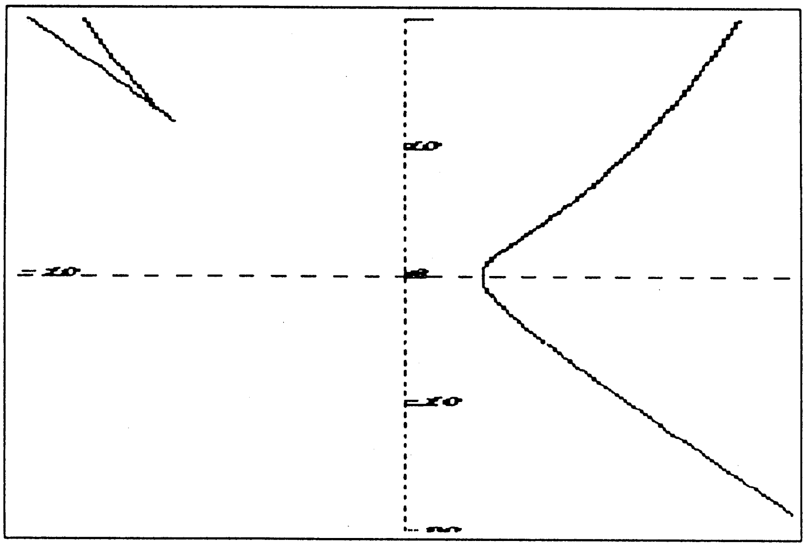

図 1 Moduli plane 上の 3 次曲線 $2\sigma_1^3+\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1^2-4\sigma_2^2-8\sigma_1\sigma_2+12\sigma_1+12\sigma_2-36=0$

補題 22.2.3. は次の小節で示す。

これ以後 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ として (σ_1,σ_2) によって座標の入った $\mathbf{R}^2$ をとる。

22.2.2 2 次有理関数族の normal form

ここでは、実 2 次有理関数族の normal form について述べる。

複素 2 次有理関数族の normal form は [Mil92] にもいくつか挙げられているが、実係数の場合は、conjugacy として実係数の Möbius 変換だけしか使えないので、厳密な意味での normal form はとれない、しかし、(σ_1,σ_2) に $\langle f\rangle$ が 1 対 1 に対応する場合は、f として、$\dfrac{\mu x}{ax^2+2x+1}$ の形の関数がとれる。

よって、この意味で次のような 2 パラメータ 2 次有理関数族

$$f_{a,\mu}(x)=\frac{\mu x}{ax^2+2x+1}\quad (a,\mu\in\mathbf{R},\ a,\mu\neq 0) \tag{3}$$

を $\mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ の normal form として考えると便利である。

実際、次のように (σ_1,σ_2) と $\langle f_{a,\mu}\rangle$ は 1 対 1 に対応する。

$f_{a,\mu}$ に対して、不動点とその multiplier は次のようになる。

$$\begin{array}{lll} \text{不動点} & 0, & \dfrac{-1\pm\sqrt{1-a(1-\mu)}}{a} \\ \text{multiplier} & \mu, & \dfrac{1}{\mu}\left\{2-\dfrac{2}{a}-\mu\pm\sqrt{1-a(1-\mu)}\right\}\quad (\text{複号同順}) \end{array}$$

したがって、$(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ と (a, μ) の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \mu + \frac{4}{\mu}(1 - \frac{1}{a}) - 2 \\ \sigma_2 &= (\mu + \frac{1}{\mu})\sigma_1 - (\mu^2 + \frac{2}{\mu})\end{aligned}$$

よって、(σ_1, σ_2) が与えられたとき、

$$\begin{cases} \mu^3 - \sigma_1\mu^2 + \sigma_2\mu - \sigma_1 + 2 = 0 \\ a = \frac{4}{\mu^2 - (\sigma_1 + 2)\mu + 4} \end{cases} \tag{4}$$

の実根 (a, μ) を求めればよい。

(4) が実根を一つだけ持つとき (a, μ) によって定まった $\langle f_{a,\mu} \rangle$ が (σ_1, σ_2) に対応する holomorphic conjugacy class となる。

(4) が実根を 3 つ持つときそれを $(a_1, \mu_1), (a_2, \mu_2), (a_3, \mu_3)$ と置くと、(σ_1, σ_2) に対応する normal form の形の関数が 3 つ存在するが、実係数 Möbius 変換によって、3 つの不動点をそれぞれ他の不動点に移すと、不動点での multiplier は Möbius 変換によって不変なので、

$$f_{a_1,\mu_1} \sim f_{a_2,\mu_2} \sim f_{a_3,\mu_3}$$

をみたす。よって、これらのうち 1 つをとって $\langle f_{a_1,\mu_1} \rangle$ が (σ_1, σ_2) に対応する holomorphic conjugacy class となる。

補題 22.2.3. の証明

上で述べたように、$f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ に対して、$a, \mu \in \mathbf{R}$ が存在して $f \sim f_{a,\mu}(x)$ となることと、$(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}^2$ と、holomorphic conjugacy class $\langle f \rangle$ の間に 1 対 1 の関係がある、ということは同値である。

よって、任意の $a, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x) \not\sim \frac{\mu x}{ax^2 + 2x + 1}$$

が成り立つ場合を考える、それは、次のような場合である。

1. f が 2 次多項式と conjugate になり、ある $c \in \mathbf{R}$ によって $f(x) \sim x^2 + c,\ c \in \mathbf{R}$ となる場合。

   このとき、関数族 $\{x^2 + c\}$ は、moduli 平面上の直線$\sigma_1 = 2$ に対応する。

2. $f \sim \frac{\mu x}{ax^2+1}$ となる場合。このとき、さらに右辺を変換すると、次のように 1 パラメータ化することができる。

$$a > 0 \quad \text{のとき} \quad f \sim \frac{\mu x}{x^2 + 1} \tag{5}$$

$$a < 0 \quad \text{のとき} \quad f \sim \frac{\mu x}{-x^2 + 1} \tag{6}$$

(5) 式、(6) 式の、不動点での multiplier を計算すると、2 式とも

$$\sigma_1 = \mu + \frac{2}{\mu}(2-\mu), \quad \sigma_2 = 2(2-\mu) + \frac{1}{\mu^2}(2-\mu)^2 \tag{7}$$

をみたす。よって、このとき (σ_1, σ_2) に対して、2つの holomorphic conjugacy class $\left\langle \frac{\mu x}{x^2+1} \right\rangle$, $\left\langle \frac{\mu x}{-x^2+1} \right\rangle$ が対応する。

したがって holomorphic conjugacu class が 2 つ対応するような (σ_1, σ_2) の集合は、(7) 式から μ を消去して、次のような3次代数曲線として得られる。

$$2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0$$

∎

この3次代数曲線は、唯一つの特異点として $(\sigma_1, \sigma_2) = (-6, 12)$ にカスプを持つ。

22.2.3 モジュライ空間上の分類

定義 22.2.4. n 周期点での、multiplier が μ であるような写像の、conjugacy class $\langle f \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathrm{R})$ の集合を $\mathrm{Per}_n(\mu)$ とする。

補題 22.2.5. [Mil92] $\mathrm{Per}_1(\mu)$ は直線であり、

$$\begin{cases} \mu \neq 0 \text{ のとき} & \sigma_2 = (\mu + \mu^{-1})\sigma_1 - (\mu^2 + 2\mu^{-1}) \\ \mu = 0 \text{ のとき} & \sigma_1 = 2 \end{cases} \tag{8}$$

となる。(図 22.2.3 参照。)

実2次有理関数 f を次のような7つの場合に分類する。

1. f の2つの critical point が複素共役のとき。
   (a) 微分係数が正ならば degree +2
   (b) 微分係数が負ならば degree −2
2. f の2つの critical point が実数のとき。区間 $I = f(\mathbf{R} \cup \{\infty\})$ とおいて
   (a) I が critical point を含まないとき。
      i. I で単調増加ならば +monotone
      ii. I で単調減少ならば −monotone
   (b) I が critical point を一つだけ含むとき。unimodal
   (c) I が 2つの critical points を含むとき、I での微分係数の正負の変化により、
      i. (+ − +)bimodal
      ii. (− + −)bimodal

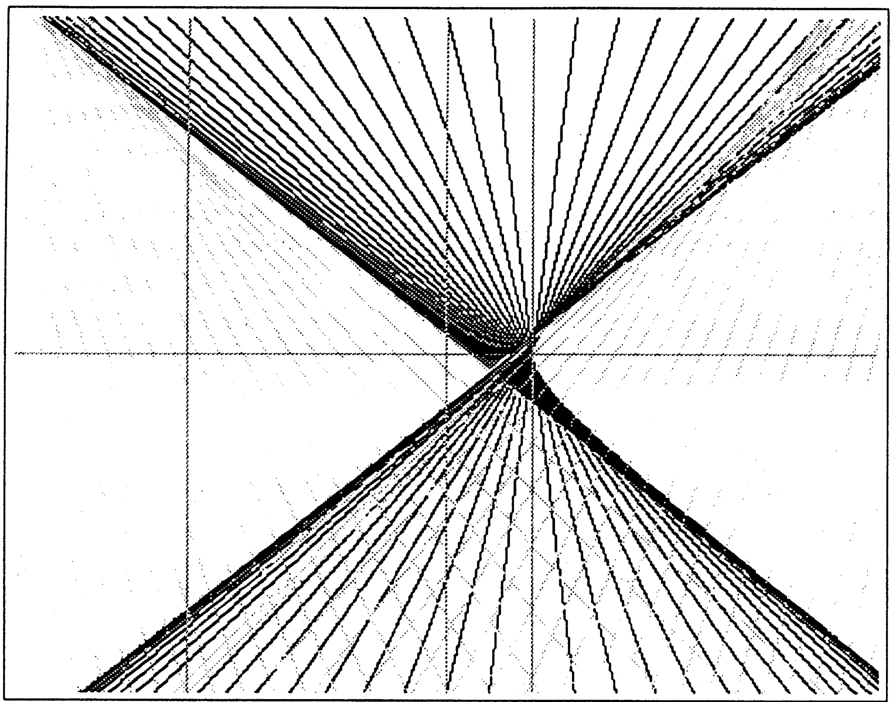

図 2 Moduli plane $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$: $\mathrm{Per}_1(\mu)$ の直線族。 $-10 < \sigma_1 < 10$, $-20 < \sigma_2 < 20$. 薄いグレーの直線は、repeling fixed point を持つ関数に対応し、濃いグレーの直線は、attracting fixed point を持つ関数に対応している。 $\sigma_1 < -6$, $\sigma_1 > 2$ の部分に見えている包絡線 (薄いグレー) は、補題の 3 次代数曲線と一致する。

この分類を (a, μ) によって座標の入った $\{f_{a,\mu}(x)\}$ のパラメータ平面上で行なうとき、次の代数曲線によってなされる。(図 22.2.3 参照。)

$$\begin{cases} a(\mu-2)^2 - 4 = 0 \\ a(\mu+2)^2 - 4 = 0 \\ \mu = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ 上でこれらの分類は次の代数曲線によりなされ $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ は 7 つの領域に分けられる。(図 22.2.3 参照。)

$$\begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_1 = 2 \\ 2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0 \end{cases}$$

ただし、$f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbf{R})$ の 2 つの critical points をω_1, ω_2 としたとき、直線 $\sigma_1 = -6$ は $f(\omega_1) = \omega_2$ をみたす関数族、$\sigma_1 = 2$ は $f(\omega_1) = \omega_1$ をみたす関数族に対応する。

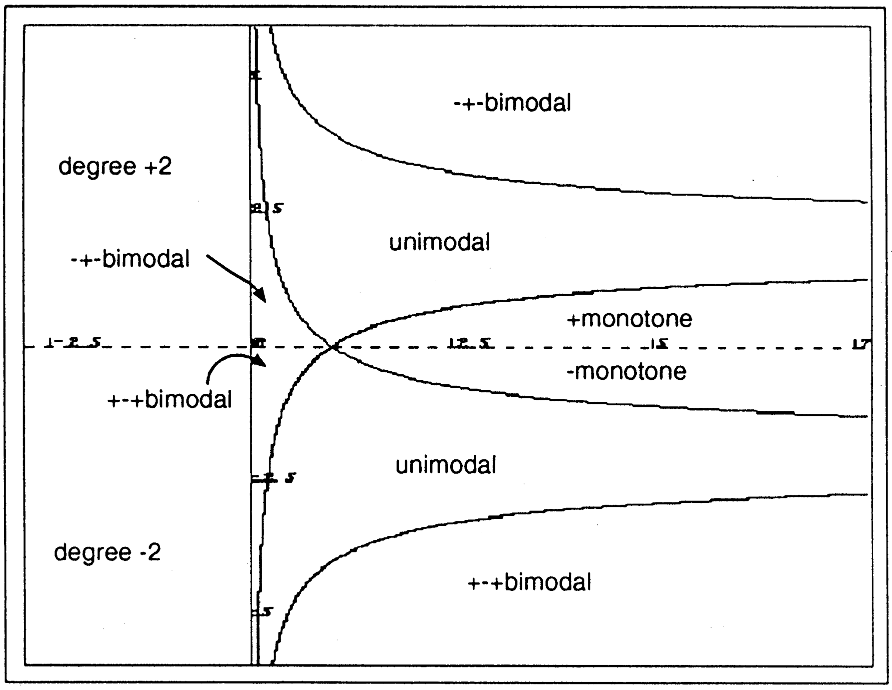

図 3 Parameter plane: パラメータ平面内の代数曲線による分類。

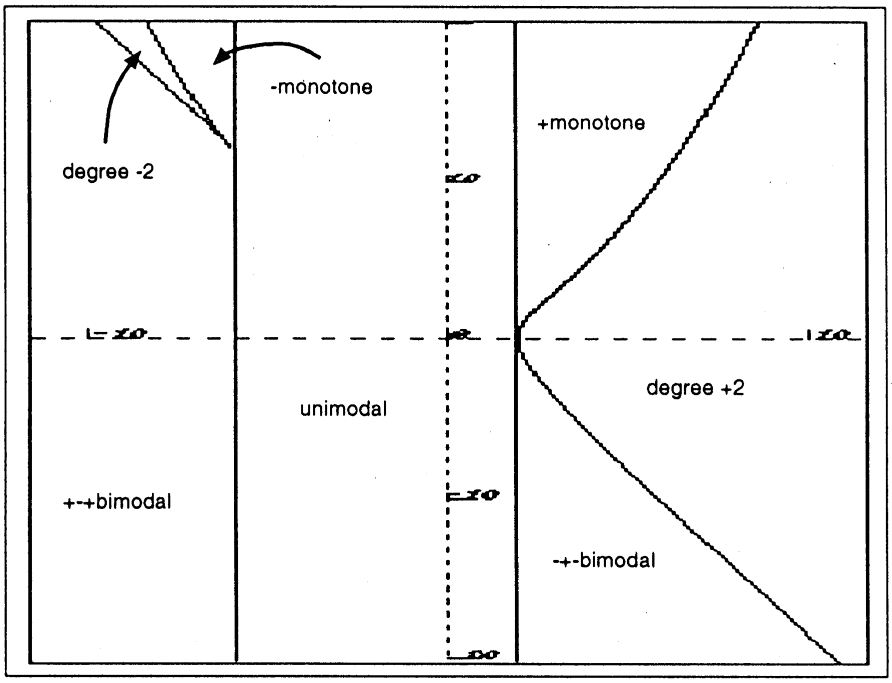

図 4 Moduli plane:モジュライ平面内の代数曲線による分類。

参考文献

[Bea91] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, 1991.

[Mil] J. Milnor. Dynamics in one complex variables: Introductory lectures. Preprint # 1990/5, SUNY Stony Brook,1990.

[Mil92] J. Milnor. Remarks on quadratic rational maps. Preprint # 1992/14, SUNY Stony Brook, 1992.